

На правах рукописи

МАЛКИН Сергей Александрович

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН  
И ПЛОСКИХ НЕГЕРЦЕВСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ  
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2004

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина”

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор Юрий Павлович Артюхин

Официальные оппоненты: доктор технических наук,  
профессор Игорь Георгиевич Емельянов  
доктор физико-математических наук,  
профессор Николай Георгиевич Рябенков

Ведущая организация: Казанский государственный  
технологический университет

Защита состоится “ 30 ” сентября 2004 г. в 14 ч. 30 мин. в ауд. 324 НИИММ на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по механике при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке КГУ.

Автореферат разослан “ \_\_\_\_\_ ” 2004 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета, к. ф.-м. н.



А.А. Саченков

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

### **Актуальность работы**

Высокие требования, предъявляемые к надежности современных машин и механизмов, в настоящее время могут быть удовлетворены лишь при условии обеспечения процесса проектирования оперативной и достоверной информацией об их напряженно-деформированном состоянии. Расчетные схемы исследуемых конструкций при этом должны быть максимально приближены к реальным объектам, учитывать сложность их конструктивных форм, структуры и характер нагружения, которое обычно осуществляется посредством контакта отдельных деталей.

Контактные задачи отличаются разнообразием подходов и применяемых теорий. Основные достижения по этой проблеме получены в работах Г. Герца, И.Я. Штаермана, Г.Я. Попова, Н.И. Мухелишвили, Л.А. Галина, В.М. Александрова, Ю.П. Артюхина, Э.И. Григолюка, В.С. Гудрамовича, К. Джонсона, И.Г. Емельянова, Г.Б. Иосилевича, Б.Я. Кантора, А.С. Кравчука, В.И. Моссаковского, В.П. Ольшанского, Б.Л. Пелеха, В.М. Толкачева, Т. Andersson, A. Blazques, G.M.L. Gladwell, J.T. Oden, F. Paris и других.

Современные исследования в области решения контактных задач проводятся в основном в вариационной постановке с использованием метода конечных элементов. Интегральная постановка в решении контактных задач, с которой и получили начало исследования в этой области, ограничивается только задачами для тел с достаточно простой геометрией. Это объясняется трудностью построения функции влияния, которая выступает ядром в разрешающих интегральных уравнениях, для тел сложной формы. Использование метода граничных элементов (МГЭ) позволяет построить функцию влияния в численно-аналитическом виде для тел произвольной формы.

Теория Герца, на основе которой проведено решение большинства прикладных контактных задач, возникающих при прочностных расчетах элементов машиностроительных конструкций, также построена с использованием интегрального подхода. Однако тот факт, что функция влияния заменяется фундаментальным решением для полуплоскости, накладывает ограничения на геометрию и способ взаимодействия тел. Предложенные в данной работе численные алгоритмы позволят решать поставленные задачи взаимодействия жесткого и упругого тел в их действительной геометрии с учетом всех приложенных краевых условий. Это позволит оценить применимость теории Герца к решению плоских контактных задач.

### **Цель работы:**

- применить метод граничных интегральных уравнений к решению контактных задач для тел сложной геометрии путем построения численно-аналитической функции влияния;
- разработать и применить алгоритм на основе непрямого МГЭ решения

двумерных контактных задач для пластин произвольной формы с неизвестной областью контакта;

- разработать и применить алгоритм на основе непрямого МГЭ решения плоских контактных задач в отказе от положений теории Герца, сравнить полученные решения с решением по теории Герца.

**Научную новизну** работы составляет развитие МГЭ применительно к контактным задачам для тонкостенных элементов и плоских тел. Созданы алгоритмы поиска областей контакта, определения контактных напряжений и напряженно-деформированного состояния упругих тел при их взаимодействии с жесткими телами. Дано решение прикладных задач, на примере которых продемонстрирована эффективность предложенных алгоритмов.

**На защиту выносятся:**

- алгоритм решения двумерных контактных задач взаимодействия пластин произвольного очертания с жесткими телами при неизвестной области контакта на основе непрямого МГЭ;
- результаты решения ряда контактных задач передачи усилий на пластины посредством жестких накладок и штампов;
- интегральные уравнения непрямого МГЭ с фундаментальным решением для полуплоскости плоских задач теории упругости для тел сложной формы с замкнутым контуром;
- алгоритм решения плоских негерцевских контактных задач взаимодействия упругих и жестких тел при неизвестной области контакта на основе непрямого МГЭ;
- результаты решения негерцевских задач контакта плоских упругих и жестких тел, сравнение их с решением по теории Герца;
- результаты расчета на контактную прочность эвольвентного зубчатого зацепления.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается: строгими математическими постановками рассматриваемых задач и обоснованным применением математических методов; аналитическим вычислением сингулярных интегралов; сходимостью приближенных решений, полученных МГЭ, при увеличении числа элементов на контуре; совпадением численных результатов решения ряда тестовых задач с аналитическими, опубликованными в литературе или полученными в диссертации; тщательным тестированием численных алгоритмов на всех этапах разработки и реализации.

**Практическая значимость** работы заключается в развитии численных методов решения контактных задач. Разработанные в диссертации методики могут быть использованы в проектных и конструкторских организациях для инженерных расчетов напряженно-деформированного состояния деталей машин при контактных взаимодействиях.

**Апробация работы.** Результаты работы доложены на Международной конференции “Актуальные проблемы механики оболочек” (Казань, 2000), XIII Всероссийской межвузовской научно-технической конференции (Казань,

2001), XI и XIII Межвузовских конференциях “Математическое моделирование и краевые задачи” (Самара, 2001, 2003), VIII Четаевской международной конференции “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” (Казань, 2002), XX Международной конференции по теории оболочек и пластин (Н. Новгород, 2002), XX Международной конференции “Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов” (С.-Петербург, 2003), Конференции “Наука и практика. Диалоги нового века” (Наб. Челны, 2003), Всероссийских молодежных научных школах-конференциях “Лобачевские чтения” (Казань, 2001, 2003), итоговых научных конференциях Казанского университета (2001-2003).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 11 научных работ.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 166 страниц, включая 71 рисунок, 12 таблиц и список литературы из 261 наименования.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** приводится обзор работ, близких к теме диссертации, сформулированы актуальность, цель работы, ее структура, выписаны положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** описывается алгоритм применения непрямого метода граничных элементов к решению задачи изгиба пластин произвольного контура в линейной постановке. Рассматривается тонкая изотропная линейно-упругая пластина, срединная поверхность которой занимает область  $\Omega$ , ограниченную гладким контуром  $\Gamma$ . Область пластины  $\Omega$  дополняется областью  $\Omega^-$  до бесконечной области. По контуру  $\Gamma$  к бесконечной пластине прикладываются компенсирующие нагрузки  $p(\zeta)$  и  $m(\zeta)$ . Нагрузка  $p(\zeta)$  - распределенное по контуру  $\Gamma$  усилие, нормальное поверхности пластины,  $m(\zeta)$  - распределенный по контуру  $\Gamma$  момент вокруг касательной к контуру  $\Gamma$ . Решение задачи изгиба пластины рассматривается в интегральном виде, который согласно методу компенсирующих нагрузок запишется:

$$w(t) = w^r(t) + \int_{\Gamma} p(\zeta) G(t, \zeta) d\Gamma(\zeta) - \int_{\Gamma} m(\zeta) \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n(\zeta)} d\Gamma(\zeta), \quad t \in \Omega, \quad (1)$$

$$w^r(t) = \iint_{\Omega} G(t, \zeta) q(\zeta) d\Omega(\zeta), \quad t \in \Omega.$$

Здесь  $t(x, y)$  - точка наблюдения,  $\zeta(\xi, \eta)$  - точки действия нагрузок,  $G(t, \zeta)$  -

фундаментальное решение для задачи изгиба пластины:  $G(t, \zeta) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r$ ,

$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ ,  $n$ ,  $\tau$  – нормальное и касательное направления к контуру пластины,  $q(\zeta)$  – интенсивность распределенной по области пластины нормальной нагрузки.

Компенсирующие нагрузки определяются из граничных условий на контуре пластины  $\Gamma$ . Разрешающая система интегральных уравнений строится путем подстановки выражения прогиба (1) в граничные условия.

В случае разбиения контура пластины на  $N$  граничных элементов с постоянной аппроксимацией компенсирующих нагрузок граничные условия, записанные в узловых точках  $t_i$ , для жесткого защемления примут следующий дискретный вид

$$A_i + \sum_{j=1}^N p_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N m_j H_{ij} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad , \quad (2)$$

$$B_i + \sum_{j=1}^N p_j R_{ij} - \sum_{j=1}^N m_j M_{ij} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad , \quad (3)$$

где неизвестными являются значения компенсирующих нагрузок на граничных элементах  $p_j = p(t_j)$ ,  $m_j = m(t_j)$ , коэффициенты в уравнениях (2),(3) имеют вид

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} G(t_i, \zeta) d\Gamma(\zeta) \quad , \quad H_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(t_i, \zeta)}{\partial n(\zeta)} d\Gamma(\zeta) \quad , \quad R_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(t_i, \zeta)}{\partial n(t_i)} d\Gamma(\zeta) \quad ,$$

$$M_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial^2 G(t_i, \zeta)}{\partial n(\zeta) \partial n(t_i)} d\Gamma(\zeta) \quad , \quad A_i = w^r(t_i) \quad , \quad B_i = \frac{\partial w^r(t_i)}{\partial n(t_i)} \quad . \quad (4)$$

При шарнирном опирании контура уравнения (3) следует заменить на

$$C_i + \sum_{j=1}^N p_j T_{ij} - \sum_{j=1}^N m_j S_{ij} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad , \quad (5)$$

где

$$T_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left( \frac{\partial^2 G(t_i, \zeta)}{\partial n^2(t_i)} + \nu \frac{\partial^2 G(t_i, \zeta)}{\partial \tau^2(t_i)} \right) d\Gamma \quad , \quad S_{ij} = \int_{\Gamma_j} \left( \frac{\partial^3 G(t_i, \zeta)}{\partial n(\zeta) \partial n^2(t_i)} + \nu \frac{\partial^3 G(t_i, \zeta)}{\partial n(\zeta) \partial \tau^2(t_i)} \right) d\Gamma \quad ,$$

$$C_i = \frac{\partial^2 w^r(t_i)}{\partial n^2(t_i)} + \nu \frac{\partial^2 w^r(t_i)}{\partial \tau^2(t_i)} \quad . \quad (6)$$

При  $r \rightarrow 0$  подынтегральные выражения содержат особенности типа  $\ln r$  и  $1/r$ . В работе получены аналитические формулы вычисления интегралов по граничным элементам (4),(6). Их, безусловно, можно найти приближенно с любой степенью точности методами численного интегрирования, но

получаемые аналитические решения помогают глубже понять проблемы, связанные с наличием у функций особенностей. Система линейных алгебраических уравнений (2),(3) или (2),(5) решается методом Гаусса. Значения функции  $w(t)$  в области определяются соотношением (1). На ряде тестовых задач, имеющих точное решение, показана эффективность используемого метода.

**Во второй главе** описываются разработанные алгоритмы на основе непрямого МГЭ решения задач передачи усилий на пластины посредством жестких накладок и нелинейной проблемы поиска границ контакта при различных условиях взаимодействия пластины сложной формы с гладкими жесткими телами без учета касательного сцепления.

Прогиб пластины, вступившей в контакт на неизвестной области  $S$ , записывается в интегральном виде

$$w(t) = \int_{\Omega} qG(t, \chi) d\Omega(\chi) - \int_S \sigma(\chi) G(t, \chi) dS(\chi) + \int_{\Gamma} p(\zeta) G(t, \zeta) d\Gamma(\zeta) - \int_{\Gamma} m(\zeta) \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n(\xi, \eta)} d\Gamma(\zeta), \quad t \in \Omega \quad (7)$$

Здесь неизвестными являются подынтегральные функции контактных напряжений  $\sigma(\chi)$ , компенсирующих нагрузок  $p(\zeta)$  и  $m(\zeta)$  и область интегрирования  $S$ . Для их определения используются два граничных условия закрепления пластины и два условия контакта. Первое условие контакта ставится по перемещениям исходя из того, что в области контакта сторона пластины, которая вступает в контакт с жестким телом, принимает заданную форму:

$$-k\sigma(t) + w(t) = Z(t), \quad t \in S, \quad (8)$$

где  $Z(t)$  - функция формы жесткого тела. Слагаемое  $k\sigma(t)$  в условии контакта имеет смысл прогиба контактной поверхности пластины вследствие обжатия, возникающего от действия контактных напряжений. Учет обжатия проводится по модели упругого основания Винклера с коэффициентом постели

$$k = \frac{h(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(1-\nu)}, \quad \text{где } h - \text{толщина пластины, } E - \text{модуль упругости, } \nu -$$

коэффициент Пуассона. Другое условие контакта ставится как условие равенства нулю контактных напряжений на границе области контакта  $\Gamma_1$  в силу плавного сопряжения форм поверхностей пластины и гладкого жесткого тела:

$$\sigma(t) = 0, \quad t \in \Gamma_1. \quad (9)$$

Подставляя выражение прогиба в указанные выше условия, получаем систему из четырех уравнений, три из которых интегральные, а одно в конечном виде (9). Решение проводится численно на основе непрямого МГЭ. Граница пластины  $\Gamma$  разбивается на  $N$  постоянных граничных элементов. Область  $S$  аппроксимируется треугольными трехузловыми элементами (рис.1) с

разбиением границы области контакта  $\Gamma_1$  на  $N_1$  узлов. Координаты этих  $N_1$  узлов полностью определяют размеры и положение искомой области контакта  $S$ . В общем случае координаты каждого узла зависят от двух параметров, и дискретная система разрешающих уравнений является незамкнутой. Описывая координаты в полярной системе с фиксированными углами, получим, что узел определяется только одним параметром - расстоянием  $\rho_k$  ( $k=1, \dots, N_1$ ) до некоторой точки (полюса). В результате выбора такой системы координат описания границы  $\Gamma_1$  получаем, что область  $S$  зависит от  $N_1$  параметров ( $\rho_k$ ). В качестве полюса следует принимать точку, которая лежит в области контакта, наиболее просто такую точку брать как точку первого касания пластины и жесткого тела.

В результате описанной выше дискретизации границы пластины и области контакта разрешающая интегральная система сводится к системе алгебраических уравнений, которая является линейной относительно дискретных значений контактных напряжений и компенсирующих нагрузок и нелинейной относительно радиусов  $\rho_k$ . Для решения полученной алгебраической системы из нее выделяем  $N_1$  уравнений, которые являются дискретным представлением условия (8) для узлов границы области контакта  $\Gamma_1$ , и рассматриваем выделенную систему как зависящую только от  $\rho_k$ , а значения контактных напряжений и компенсирующих нагрузок определяются из оставшихся уравнений, которые при заданных начальных значениях  $\rho_k$  являются линейными. Решение выделенной системы нелинейных уравнений проводится итерационно методом Ньютона. Якобиан метода Ньютона строится численно по формулам дифференцирования в конечных разностях с варьированием радиусов  $\rho_k$  поочередно. Для малой области контакта начальную форму ее границы можно принять в виде окружности, т.е. задавая значения радиусов постоянными. При развитых областях контакта метод Ньютона с такой начальной аппроксимацией не сходится. Поэтому для развитых областей контакта задача решается пошагово по нагружению, выбирая в качестве начального приближения области контакта решение предыдущего шага.

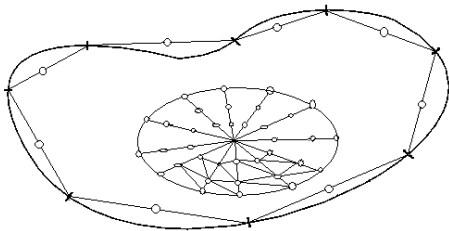


Рис.1

Предложенный алгоритм определения напряженно-деформированного состояния пластин, вступающих в контакт с гладкими жесткими телами, реализуется в следующих задачах:



## 1. Задача контакта пластины с жесткой преградой.

Пластина, занимающая область  $\Omega$  и некоторым образом закрепленная на границе  $\Gamma$ , изгибается под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$ . Ее прогиб ограничен жесткой плоскостью, находящейся на расстоянии  $\alpha$  от плоскости пластины (Рис.2).

В одном из рассматриваемых примеров исследуется взаимодействие с горизонтальной плоскостью треугольной равносторонней пластины, шарнирно опертой по краям, для исходных данных: сторона пластины 1 м, толщина  $h = 0.05$  м, расстояние (зазор)  $\alpha = 0.01$  м, материал

$E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ . На рис.3 показано развитие области контакта при нагрузках  $q$  равных 80, 120, 180, 260, 340 МПа.

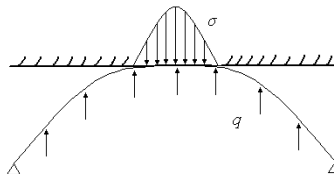


Рис.2

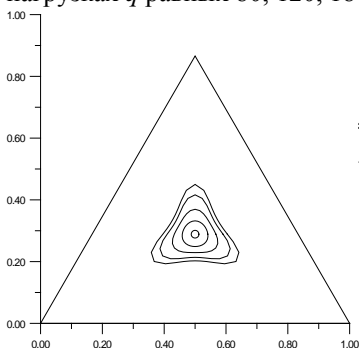


Рис.3

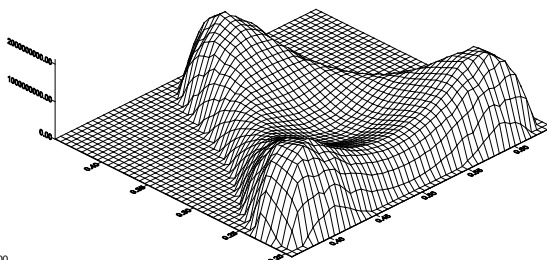


Рис.4

При первых трех значениях нагружения начальное приближение границы области контакта выбиралось в виде окружности. Для остальных нагрузок начальное приближение задавалось в виде границы контакта, полученной из решения от предыдущего шага нагружения. Контактные напряжения для малых областей контакта имеют выпуклый вид с максимальным значением в центре области контакта. С развитием области контакта происходит перестройка распределения контактных напряжений с концентрацией их к границе контакта. На рис.4 показана пространственная эпюра контактных напряжений, возникающих при нагрузке равной 340 МПа.

Для круглой жестко защемленной пластины и горизонтальной плоскости строится аналитическое решение с помощью фундаментального решения для кольцевой нагрузки. Приближенное решение при различных способах аппроксимации хорошо согласуется с точным решением.

2. Давление гладкого жесткого тела на пластину (задача передачи сосредоточенного усилия на пластину посредством жесткого штампа).

Рассматривается задача изгиба пластины под действием жесткого гладкого штампа, не имеющего угловых точек (рис.5). Штмп действует на пластину посредством неизвестных контактных напряжений  $\sigma(\chi)$ , распределенных по неизвестной области контакта  $S$ . Интегральное выражение прогиба пластины запишется в виде

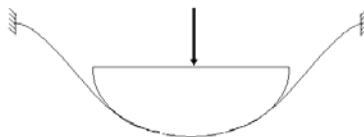


Рис.5

$$w(t) = \int_S \sigma(\chi) G(t, \chi) dS(\chi) + \int_{\Gamma} p(\zeta) G(t, \zeta) d\Gamma(\zeta) - \int_{\Gamma} m(\zeta) \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n(\xi, \eta)} d\Gamma(\zeta), \quad t \in \Omega. \quad (10)$$

Решение проводится на примере поступательного вдавливания жесткого шара в равностороннюю треугольную жестко защемленную пластину в ее центре под действием силы  $P$ . В данной постановке к неизвестным добавится также осадка штампа  $\alpha$ . Для замыкания системы разрешающих уравнений к ним добавляется условие равновесия жесткого штампа

$$\int_S \sigma(\chi) dS(\chi) = P. \quad (11)$$

Длина сторон пластины равна 1 м, толщина  $h = 0.05$  м, материал  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ , радиус шара  $R = 2$  м. Задание начальных приближений границы области контакта проводится аналогично предыдущей задаче. На рис.6 показано развитие области контакта при действии сил  $P$  равных 0.1, 1, 5, 8, 10, 12 МН. На рис.7 изображена пространственная эпюра контактных напряжений для силы  $P = 12$  МН. На примере рассмотренной задачи показано, что при уменьшении кривизны подошвы штампа увеличивается область контакта, уменьшаются осадка и контактные напряжения.

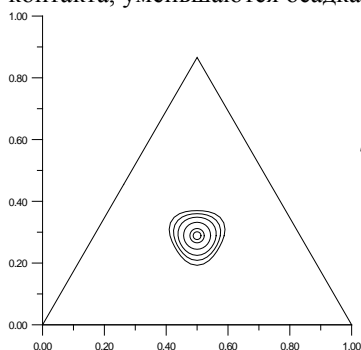


Рис.6

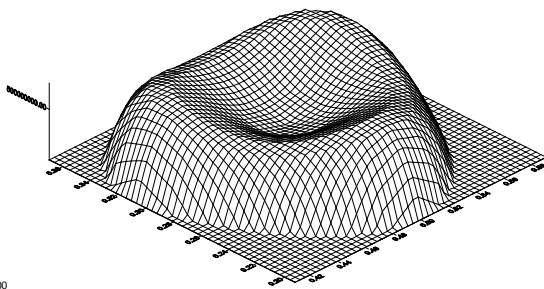


Рис.7

**В третьей главе** описывается алгоритм применения непрямого МГЭ к решению плоских задач теории упругости на основе фундаментального решения для полуплоскости. Рассматривается плоское тело произвольной формы, ограниченное контуром  $\Gamma$ . Вводятся глобальные неподвижные оси  $x_1, y_1$

и локальная подвижная система координат  $x, y$ , связанная с границей  $\Gamma$ . Ось  $x$  локальной системы направлена внутрь тела перпендикулярно касательной к границе, а ось  $y$  образует с ней правую систему координат. Если в каждой точке  $\zeta$  границы  $\Gamma$  будут действовать распределенные нормальная  $p(\zeta)$  и касательная  $\tau(\zeta)$  нагрузки, то во внутренней точке  $z$  возникнут перемещения в глобальной системе координат:

$$\{U(z)\} = \int_{\Gamma} [N_u(\zeta)] [G_u(z, \zeta, n(\zeta))] \{F(\zeta)\} d\Gamma(\zeta). \quad (12)$$

Здесь  $\{U(z)\} = \begin{Bmatrix} u_{x_1}(z) \\ v_{y_1}(z) \end{Bmatrix}$  - вектор перемещений в точке  $z$  в глобальной системе координат,  $\{F(\zeta)\} = \begin{Bmatrix} p(\zeta) \\ \tau(\zeta) \end{Bmatrix}$  - вектор компенсирующих нагрузок в точке  $\zeta$ ,  $[G_u(z, \zeta, n(\zeta))]$  - матрица фундаментальных решений по перемещениям для полуплоскости в локальной системе координат  $(x, y)$ , где

$$\begin{aligned} G_{11}^u &= \frac{1}{2\pi G} \left[ -2(1-\nu) \ln r - \frac{y^2}{r^2} \right], & G_{12}^u &= \frac{1}{2\pi G} \left[ -(1-2\nu) \arctg \frac{y}{x} + \frac{xy}{r^2} \right], \\ G_{21}^u &= \frac{1}{2\pi G} \left[ (1-2\nu) \arctg \frac{y}{x} + \frac{xy}{r^2} \right], & G_{22}^u &= \frac{1}{2\pi G} \left[ -2(1-\nu) \ln r - \frac{x^2}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$G$  - модуль сдвига,  $n(\zeta)$  и  $s(\zeta)$  - нормальное и касательное направления к границе в точке  $\zeta$ , матрица преобразования локальных перемещений к глобальным имеет вид  $[N_u(\zeta)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$ , где  $\varphi = \varphi(\zeta)$  - угол между локальной  $x$  и глобальной  $x_1$  осями систем координат.

Аналогично можно записать матричное выражение для напряжений в некоторой точке тела  $z$  от действия компенсирующих нагрузок по границе

$$\{S(z)\} = \int_{\Gamma} [N_{\sigma}(\zeta)] [G^{\sigma}(z, \zeta, n)] \{F(\zeta)\} d\Gamma(\zeta). \quad (14)$$

Здесь  $\{S(z)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x_1} \\ \sigma_{y_1} \\ \tau_{x_1 y_1} \end{Bmatrix}(z)$  - вектор напряжений в точке  $z$  в глобальной системе координат,  $[G^{\sigma}(z, \zeta, n(\zeta))]$  - матрица фундаментальных решений по напряжениям для полуплоскости в локальной системе координат  $(x, y)$ , где

$$G_{11}^{\sigma} = -\frac{2x^3}{\pi r^4}, \quad G_{12}^{\sigma} = -\frac{2x^2 y}{\pi r^4}, \quad G_{21}^{\sigma} = -\frac{2xy^2}{\pi r^4},$$

$$G_{22}^{\sigma} = -\frac{2y^3}{\pi r^4}, \quad G_{31}^{\sigma} = -\frac{2x^2y}{\pi r^4}, \quad G_{32}^{\sigma} = -\frac{2xy^2}{\pi r^4}, \quad (15)$$

матрица преобразования напряжений в локальных координатах к глобальным имеет вид

$$[N_{\sigma}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & \sin 2\varphi \\ \frac{1}{2} \sin 2\varphi & -\frac{1}{2} \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}.$$

Неизвестные компенсирующие нагрузки  $p(\zeta)$  и  $\tau(\zeta)$  определяются из граничных условий на контуре тела  $\Gamma$ . Пусть точка  $z$  стремится к границе  $\Gamma$  и переходит в точку  $t$ . При  $\zeta \rightarrow t$ , т.е.  $r \rightarrow 0$ , ядра элементов матрицы фундаментального решения  $G_{ij}^u$  будут иметь логарифмическую особенность типа потенциала простого слоя, а потому будут непрерывны по всему контуру. Ядра элементов матрицы фундаментального решения  $G_{ij}^{\sigma}$  в рассматриваемом случае будут иметь особенность типа потенциала двойного слоя, т.е. будут испытывать скачок при переходе через контур  $\Gamma$ . Проведен анализ предельных соотношений  $G_{ij}^{\sigma}$ :

$$\lim_{\zeta \rightarrow t, z \rightarrow t} [G^{\sigma}(z, \zeta, n(\zeta))] = \begin{bmatrix} -\delta(y) & 0 \\ -\frac{1}{\pi} \delta_+(x) & -\frac{1}{2} \operatorname{sgn} y \delta_+(x) \\ 0 & -\delta(y) \end{bmatrix},$$

где  $\delta_+(x)$  - несимметричная справа  $\delta$ -функция. Используя фильтрующее свойство  $\delta$ -функции, граничные условия для напряжений запишутся следующим образом (первая и третья строки):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \sigma_y \\ \tau_n \end{Bmatrix}(t) = - \begin{Bmatrix} p \\ 0 \\ \tau \end{Bmatrix}(t) + \int_{\Gamma} [N_{\sigma}] [G^{\sigma}] \{F\}(\zeta) d\Gamma(\zeta). \quad (16)$$

Для нормального  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  касательного напряжений на контуре появляется внеинтегральный член, а оставшийся интеграл не содержит особенности (особая точка выколота) и понимается как главное значение. Этот результат имеет ясный механический смысл: нормальное и касательное напряжения в точке  $t$  складывается из компенсирующих нагрузок в этой точке (внеинтегральный член) и суммарного вклада от компенсирующих нагрузок по контуру  $\Gamma$  без учета точки  $t$ .

Численное решение проводится непрямым МГЭ. Граница  $\Gamma$  плоского упругого тела разбивается на  $N$  прямолинейных граничных элементов, внутри

которых полагается, что компенсирующие нагрузки нормальная  $p(\zeta)$  и касательная  $\tau(\zeta)$  изменяются по линейному закону. Узлы граничного элемента располагаются на концах. Разрешающая система уравнений следует из удовлетворения на контуре тела граничных условий, которые имеют вид заданных нормальных и касательных напряжений или перемещений. При составлении этих уравнений возникает необходимость состыковки компенсирующих нагрузок по соседним элементам в их общем узле. Для этого компенсирующие нагрузки  $p(\zeta)$  и  $\tau(\zeta)$  представляются в виде нагрузок, которые действуют в направлениях глобальных координатных осей и в пределах элемента также изменяются по линейному закону:  $\psi_1(\zeta)$  - в направлении оси  $x_1$ ,  $\psi_2(\zeta)$  - в направлении оси  $y_1$ . Проводя суммирование по всем граничным элементам с преобразованием систем координат по матрицам  $[N_u]$  и  $[N_\sigma]$ , получаем выражения напряжений и перемещений в глобальной системе координат через неизвестные дискретные значения в узловых точках функций  $\psi_1(\zeta)$  и  $\psi_2(\zeta)$  вида

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} &= \sum_{i=1}^N K_i^1 \psi_1^i + \sum_{i=1}^N K_i^2 \psi_2^i, & \sigma_{y_1} &= \sum_{i=1}^N M_i^1 \psi_1^i + \sum_{i=1}^N M_i^2 \psi_2^i, \\ \tau_{x_1 y_1} &= \sum_{i=1}^N R_i^1 \psi_1^i + \sum_{i=1}^N R_i^2 \psi_2^i, \\ u_{x_1} &= \sum_{j=1}^N F_j^1 \psi_1^j + \sum_{j=1}^N F_j^2 \psi_2^j, & u_{y_1} &= \sum_{j=1}^N H_j^1 \psi_1^j + \sum_{j=1}^N H_j^2 \psi_2^j.\end{aligned}\tag{17}$$

Коэффициенты при дискретных значениях компенсирующих нагрузок в (17) представляют собой линейные комбинации интегралов по граничным элементам с ядрами в виде фундаментальных решений (13),(15). При  $r \rightarrow 0$  подынтегральные выражения содержат особенности типа  $\ln r$  и  $1/r$ . Интегралы с особенностью  $1/r$  вычисляются в смысле конечного значения по Адамару. В работе получены аналитические формулы вычисления интегралов по граничным элементам.

**В четвертой главе** описываются разработанные алгоритмы на основе непрямого МГЭ решения контактных задач взаимодействия плоских упругого и жесткого тел при неизвестной области контакта. Тела предполагаем абсолютно гладкими и силами трения в полосе контакта пренебрегаем.

Пусть уравнение границы упругого тела до сжатия имеет вид  $y = f(x)$ , а уравнение границы жесткого тела после его перемещения записывается в виде  $y = f_s(x)$ . Начальное положение точек границы упругого тела обозначим  $(x, y)$ .

При деформировании эти точки получают перемещения  $u$  в направлении оси  $x$  и  $v$  в направлении оси  $y$  и займут положения  $(x', y')$  :

$$x' = x + u, \quad y' = y + v. \quad (18)$$

В области контакта граница упругого тела принимает вид жесткого тела. Тогда в этой области справедливо уравнение

$$y' = f_s(x'). \quad (19)$$

Подставляя соотношения (18) в уравнение (19) и раскладывая функцию  $f_s$  в ряд Тейлора по степеням  $u$  с удержанием первых двух членов, получим кинематическое условие контакта, выражающее задание формы упругого тела в области контакта в виде формы взаимодействующего жесткого тела:

$$v - f'_s(x)u = f_s(x) - y. \quad (20)$$

Граница области контакта в случае одной зоны взаимодействия тел определяется двумя параметрами, например, проекцией точек границы на ось  $x$ :  $x_a$  и  $x_b$ . В силу плавного сопряжения форм поверхностей упругого и жесткого тел, ставится условие равенства нулю нормальных контактных напряжений  $\sigma(x)$  на границе области контакта:

$$\sigma_n(x_a) = 0, \quad \sigma_n(x_b) = 0. \quad (21)$$

Так как контакт считается абсолютно гладким, то ставится условие равенства нулю касательных напряжений на границе тела в области контакта:

$$\tau_n(x) = 0, \quad x_a < x < x_b. \quad (22)$$

Уравнения (21),(22) представляют собой статические условия контакта.

Подставляя дискретные выражения напряжений и перемещений (17) в контактные условия и граничные условия на внеконтактном контуре упругого тела, получим систему нелинейных алгебраических уравнений. Нелинейно в эти уравнения входят только два параметра, определяющие неизвестную границу области контакта,  $x_a$  и  $x_b$ . Выделим из этой системы два уравнения (условия контакта (20), записанные для узлов, лежащих на границе области контакта) в виде

$$f_1(x_a, x_b) = 0, \quad f_2(x_a, x_b) = 0.$$

Оставшиеся уравнения образуют линейную алгебраическую систему, из которой при заданных  $x_a$  и  $x_b$  могут быть найдены компенсирующие нагрузки. Система из двух нелинейных уравнений решается итерационно методом Ньютона с заданием начальных значений  $x_a$  и  $x_b$ . Якобиан при решении строится численно с варьированием сетки так, что два узла ее лежат на границе области контакта. Для уменьшения времени счета следует на границе тела выделить сегмент, внутри которого будет находиться область контакта, и варьировать сетку только в пределах этого сегмента. После того как будут получены значения границы области контакта  $x_a$  и  $x_b$  и определены

компенсирующие нагрузки, соответствующие этим значениям, контактные напряжения строятся как нормальные напряжения в упругом теле на границе в области контакта. Предложенный алгоритм решения плоских контактных задач реализуется в следующих задачах:

1. В качестве теста алгоритма рассматривается задача о давлении жесткого кругового цилиндра радиуса 1 м на упругий круговой цилиндр такого же радиуса, закрепленный в центре, свойства материала  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па ,  $\nu = 0.3$ , под действием силы  $F$ . Задача в такой постановке удовлетворяет всем требованиям теории Герца. В таблице приведено решение МГЭ и сравнение его с решением Герца: полуширина области контакта  $a$  и максимальное контактное напряжение  $\sigma_{\max}$ .

Таблица

$F, 10^6 \text{ Н}$	Решение МГЭ		Решение Герца	
	$a, \text{ см}$	$\sigma_{\max}, 10^8 \text{ Н}$	$a, \text{ см}$	$\sigma_{\max}, 10^8 \text{ Н}$
5.376	0.4	8.67	0.395	8.672
31.13	0.964	20.81	0.95	20.87
185.6	2.35	50.51	2.32	50.96
642.7	4.38	93.27	4.31	94.83
2587	8.88	184.1	8.66	190.3
5875	13.53	272.9	13.05	286.7

На рис.8 показано распределение контактных напряжений при  $F = 893.5 \text{ МН}$ .

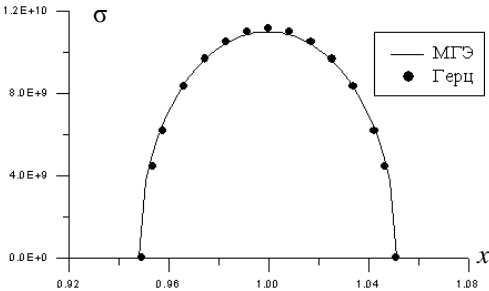


Рис.8

2. Решена плоская задача о контакте упругого кругового цилиндра с жестким круговым ложементом, радиусы которых почти равны. При сжатии рассматриваемых тел контакт между ними может распространиться на значительную часть их поверхностей, и решение Герца для этого случая будет не применимым. Аналогичную задачу рассматривал И.Я. Штаерман.

3. Построенное решение плоской контактной задачи теории упругости можно использовать для проверки модели контактного взаимодействия тонкостенных элементов, на основе которой получены решения во второй главе. Сравнение моделей проводится на примере задачи контакта шарнирно

опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластины с жесткой преградой.

Под действием равномерно распределенной нагрузки  $q$  пластина испытывает цилиндрический изгиб, и решение по теории пластин строится для одномерного случая. Начало координат выбрано в центре пластины, длина пластины  $2l$ , толщина  $h$ , область контакта ищется в виде  $[-a, a]$ , жесткая преграда отстоит от пластины на расстоянии  $\alpha$ . Тогда разрешающее уравнение, представляющее условие контакта с учетом обжатия, в безразмерном виде запишется:

$$k\sigma(x) + \int_{-a}^a G(x, \xi) \sigma(\xi) d\xi = w_0(x) - 1, \quad -a < x < a, \quad (23)$$

где  $k$  – коэффициент постели,  $\sigma(x)$  – контактное напряжение,  $w_0(x)$  – прогиб пластины без ограничения, безразмерная функция влияния имеет вид

$$G(x, \xi) = (|x - \xi|^3 + x\xi(x^2 + \xi^2 + 2) - 3(x^2 + \xi^2) + 2)/12. \quad (24)$$

В решении теории упругости шарнирное опирание моделируется нулевым смещением точек закрепленной грани в направлении перпендикулярном оси балки и нулевыми нормальными напряжениями на этой грани. На рис.9 показано распределение контактных напряжений, полученных из решения теории упругости в рядах Фурье (кривая 1), и сравнение их с напряжениями, полученными по модели для тонкостенных элементов (кривая 2), для нагрузки  $q=10^8$  Па при  $l=1$  м,  $h=0.1$  м,  $\alpha=0.025$  м, свойства материала  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu=0.3$ .

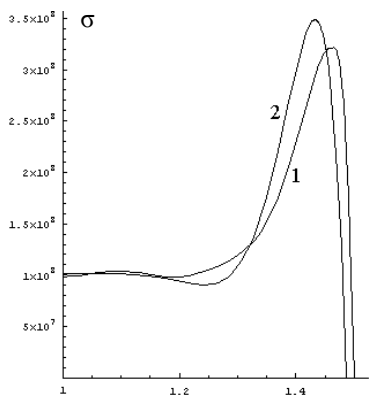


Рис.9

4. Рассмотрено влияние учета общего деформирования упругих тел на размер контактной области на примере изгиба балки-стенки под действием жесткого криволинейного штампа. На балку высотой  $H = 1$  м и длиной  $L$  в центре под действием силы  $F = 10^8$  Н давит жесткий криволинейный штамп с круглой подошвой радиуса  $R$ , свойства материала балки:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\nu = 0.3$ . Закрепление балки аналогично предыдущей задаче.

На рис.10 показаны зависимости полуширины области контакта  $a$  от радиуса кривизны подошвы штампа для некоторых значений длины балки  $L$  (в метрах). Из представленных зависимостей видно, что с увеличением длины балки область контакта также увеличивается; это объясняется тем, что чем длиннее балка, тем больший она испытывает изгиб при действии одного и того



же усилия. Теория Герца при любой длине рассматриваемой балки дает одинаковое решение, так как принимает во внимание только кривизны контактируемых тел.

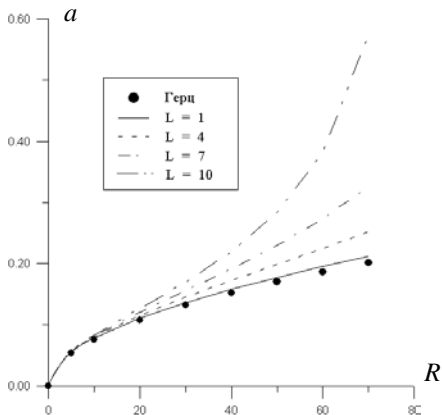


Рис.10

5. На основе предложенного алгоритма проведен расчет на контактную прочность цилиндрических зубчатых передач. В качестве примера рассмотрен зубчатый механизм с эвольвентным зацеплением, т.е. с профилями зубьев в виде эвольвенты, который получил наибольшее распространение в машиностроительной практике. Механизм состоит из зубчатых колес с основными окружностями равного радиуса  $a = 1$  м и окружностями вершин радиуса  $a_g = 1.35$  м с числом зубьев равным 16, расстояние между осями колес – 2.37 м. Для построения расчетной схемы однопарного зацепления из одного колеса выделяем зуб с жестким закреплением как показано на рис.11, а взаимодействующий с ним зуб второго колеса полагаем абсолютно жестким. На ось жесткого колеса подается крутящий момент  $M = 15$  МН·м, в результате чего в точке соприкосновения зубьев развивается область контакта. Рассмотрен ряд взаимных положений зубьев, с точкой касания от подножия упругого зуба до его вершины. На рис.11 даны линии равных интенсивностей напряжений в упругом зубе при зацеплении у вершины зуба. Жесткий зуб при действии крутящего момента в этом случае повернется на угол  $3.87 \cdot 10^{-4}$  рад. Максимальная интенсивность напряжений в зубе равная 1113 МПа возникает в точке, лежащей на линии зацепления и удаленной по нормали от поверхности контакта на 6.5мм. На рис.12 показаны распределения контактных напряжений, полученных из решения МГЭ и решения теории Герца. Отличие областей контакта, полученных из этих решений, объясняется тем, что решение Герца не учитывает изгиб контактируемых тел.

Из рис.11 видно, что в упругом теле в области, примыкающей к области контакта, напряжения имеют большой градиент, и здесь проявляется преимущество МГЭ в решении подобных контактных задач в том, что метод не

требует аппроксимации внутренней области тела, и сгущение сетки проводится только по границе.

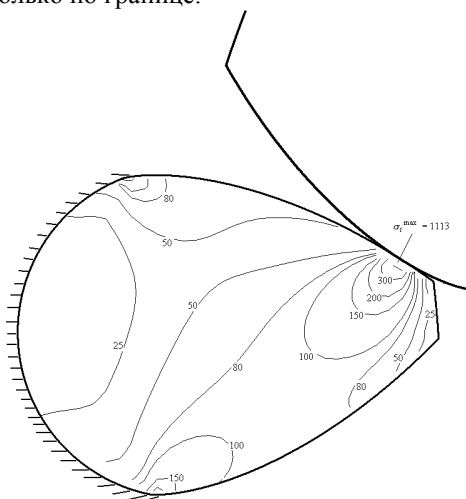


Рис. 11

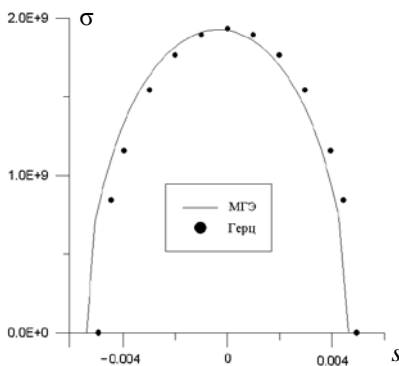


Рис.12

**В заключении** приводятся основные результаты и выводы, полученные в диссертации:

1. Разработан и реализован итерационный алгоритм на основе непрямого МГЭ решения двумерных контактных задач взаимодействия пластин произвольного очертания с жесткими телами при неизвестной области контакта. Получено аналитическое решение задачи контакта круглой пластины с жесткой преградой, подтверждающее достоверность предложенных алгоритмов поиска границы контакта. Решены контактные задачи передачи усилий на пластины сложных очертаний посредством жестких накладок и штампов. Показано, что при взаимодействии пластин с гладкими жесткими телами для малых областей контакта максимальные контактные напряжения приходится на точку первоначального касания, а при развитии области контакта происходит перестройка распределения контактных напряжений с концентрацией их к границе контакта.
2. Получена система разрешающих интегральных уравнений непрямого МГЭ, основанная на использовании фундаментального решения для полуплоскости, решения плоских задач теории упругости для тел с криволинейным замкнутым контуром. Проведен анализ сингулярных ядер, дан механический смысл внеинтегрального члена, выделяемого для устранения особенности в записи граничных условий: для нормальных и касательных напряжений в граничной точке он равен соответствующим компенсирующим нагрузкам в этой точке.
3. Разработан и реализован итерационный алгоритм на основе непрямого МГЭ решения плоских негерцевских контактных задач взаимодействия упругих и жестких тел при неизвестной области контакта. Получены и сравнены

аналитические решения задачи о контакте пластины с жестким основанием по теории пластин и теории упругости плоских задач. На примере этой задачи показана эффективность используемой в диссертации модели контактного взаимодействия тонкостенных элементов, на основе которой построены решения контактных задач взаимодействия пластин и жестких тел. Дано решение ряда плоских контактных задач и сравнение их результатов с решением по теории Герца. Показано, что при изгибе контактируемого тела теория Герца занижает и смещает область контакта. Решена контактная задача определения напряженно-деформированного состояния эвольвентных зубьев в цилиндрических зубчатых передачах.

#### **Публикации по теме диссертации:**

1. Артюхин Ю.П. Несимметричная одномерная контактная задача взаимодействия пластины с жестким телом / Ю.П. Артюхин, С.А. Малкин // Актуальные проблемы механики оболочек. Труды международной конференции, посвященной 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина, 26-30 июня 2000 г. – Казань: Новое знание, 2000. – С.92 – 97
2. Артюхин Ю.П. Двусторонняя контактная задача о давлении жесткого штампа на пластину / Ю.П. Артюхин, С.А. Малкин // Тезисы докладов XIII Всероссийской межвузовской научно-технической конференции. Часть I.- Казань, 2001. –С.273-275
3. Артюхин Ю.П. Контактная задача о давлении жесткого штампа на пластину при заданных усилиях / Ю.П. Артюхин, С.А. Малкин //Труды XI межвуз. конференции “Математическое моделирование и краевые задачи”. Часть I.- Самара: Изд-во СамГТУ, 2001. - С. 8-11
4. Артюхин Ю.П. Контактная задача взаимодействия пластины с жестким основанием / Ю.П. Артюхин, С.А. Малкин // VIII Четаевская международная конференция “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением”: Тезисы докладов. 28-31 мая 2002 г. - Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2002. – С. 301
5. Артюхин Ю.П. Контактные задачи взаимодействия пластин произвольной формы с гладкими жесткими телами / Ю.П. Артюхин, С.А. Малкин // Сборник докладов XX Международной конференции по теории оболочек и пластин: Механика оболочек и пластин. Изд-во Нижегородского госуниверситета. - Н. Новгород, 2002. - С. 93 -101.
6. Артюхин Ю.П. Контакт пластин с жестким основанием / Ю.П. Артюхин, С.А. Малкин // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2002. - №4. - С.29-35
7. Артюхин Ю.П. Плоская контактная задача взаимодействия полосы с жестким основанием/ Ю.П. Артюхин, С.А. Малкин // Наука и практика. Диалоги нового века: Материалы конференции (17-19 марта 2003 г.) Часть I. – Наб. Челны: Изд-во КамПИ, 2003. – С. 156-158

8. Artuhin Y.P. BEM solution for contact interaction problems of plates with rigid bodies/ Y.P. Artuhin, S.A. Malkin // 20-th International Conference Mathematical Modeling in Solid Mechanics. Boundary and Finite Elements Methods. Proceedings. Vol 2. - Saint Petersburg, Russia, 2003. p. 39 - 44
9. Малкин С.А. Изгиб пластин под давлением жесткого плоского штампа / С.А. Малкин // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.12. Материалы молодежной научной школы-конференции Лобачевские чтения 2001. Казанское математическое общество. –Казань: Изд-во “ДАС”, 2001. – С.99-100
- 10 Малкин С.А. Решение МГЭ контактных задач плоской теории упругости / С.А. Малкин // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.21. Материалы молодежной научной школы-конференции Лобачевские чтения 2003. Казанское математическое общество. –Казань, 2003. – С.161-162
11. Малкин С.А. Решение МГЭ плоской задачи теории упругости с использованием фундаментального решения для полупространства / С.А. Малкин // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды XIII Межвузовской конференции. Часть I. - Самара: Изд-во СамГТУ, 2003. С. 110-113